Unidad 10

Aplicaciones de cálculo integral

Objetivos

Al terminar la unidad, el alumno:

- Aplicará los métodos de integración en la solución de problemas sobre la función de utilidad.
- Definirá la asignación y agotamiento de recursos.
- Empleará las técnicas de integración en problemas de recursos.
- Definirá lo que es un inventario y su utilización.
- Aplicará las formas de integración en la solución de problemas sobre inventarios.

Introducción

Las diferenciales e integrales permitieron observar que al emplear distintas funciones como las compuestas, logarítmicas, exponenciales, etc., cobraron importancia los aspectos marginales para medir los cambios que tiene una variable cuando otra se modifica, a fin de explicar un fenómeno determinado.

Dentro de las funciones marginales se habló de costos e ingresos y cómo se modifican éstos cuando cambia la cantidad producida de artículos, lo cual hace posible determinar las utilidades generadas por una empresa.

En esta unidad se hará uso de las fórmulas y los conceptos descritos anteriormente con el propósito de plantear y resolver ejercicios que se basen en situaciones dentro de las empresas. Al mismo tiempo, se trabajará con algunos elementos importantes para cualquier empresa: los recursos material y humano, que generan costos y hacen posible incrementar la producción.

Por último, se define un inventario y se establecen los costos que genera, así como su utilidad para mantener un nivel de producción adecuado sin que al generarse un exceso de demanda en el mercado, se produzca una escasez de artículos.

10.1. Función de utilidad

En la teoría del comportamiento del consumidor se afirma que éste escoge entre las posibilidades de que dispone, de manera que maximice la satisfacción derivada del consumo o uso de los artículos. Esto implica que el consumidor conoce las opciones y es capaz de evaluarlas. Toda la información relevante respecto de la satisfacción que un consumidor obtiene de las diversas cantidades de los artículos está contenida en su *función de utilidad*.

La función de utilidad para una empresa se basa en parte en la teoría sobre el consumidor, pero toma un sentido diferente en el cual lo que interesa es la *cantidad monetaria* que ganará al realizar una venta de los artículos que produce y el *costo* en el que incurre para producirlos. Recordemos que la función de utilidad de una empresa se determina como la diferencia entre ingresos y costos $U(x) = I(x) - C(x)$, donde se espera que la empresa obtenga la mayor ganancia posible. Es de esperarse que si las ventas de una empresa disminuyen, su ingreso también lo hará y, por lo tanto, la utilidad que espera obtener no será la deseada. De igual manera, la utilidad no será grande si los costos se incrementan.

De lo anterior se desprende que para un individuo la utilidad estará en función del número de bienes que puede adquirir con una cantidad de dinero, y para la empresa, la utilidad estará en función de la cuantía de artículos producidos que se demandan en el mercado.

En ocasiones nos interesa no sólo conocer la utilidad total que produce un artículo, o la ganancia que obtiene una empresa al vender cierta cantidad de artículos, sino también determinar la utilidad marginal.

Por ejemplo, para comprender la noción de utilidad marginal para un individuo (o empresa), supongamos que una persona pasa un gran periodo de tiempo sin consumir líquidos y, por tanto, es de esperarse que tenga una gran necesidad de satisfacer su sed; al comenzar a tomar el primer vaso de agua la satisfacción o utilidad que le proporciona es alta, pero a medida que va ingiriendo más agua la satisfacción es cada vez menor.

Asimismo, una empresa espera que su utilidad se incremente al vender una mayor cantidad de artículos, por lo que tiene que incrementar su producción, pero también debe considerarse que al aumentar su producción debe subir sus costos, ya que puede ser necesario, además de adquirir una mayor cantidad de materia prima, contratar más personal o utilizar una mayor cantidad de maquinaria y equipo, cuestiones que si crecen demasiado llegarán a un punto donde los costos sobrepasen a los ingresos, provocando que las ganancias se conviertan en pérdidas.

> La **utilidad** para una empresa es la cantidad monetaria que espera ganar al efectuar una venta luego de descontar los costos de los artículos que produjo y vendió.

En términos matemáticos podemos decir que al integrar la función de utilidad marginal obtenemos la **utilidad total**.

Ejemplo 1

Una empresa comercializa entre otros productos pan de caja y un vino francés. La función de utilidad marginal del pan está dada por $f(x) = 40 - 5x$ y la utilidad marginal del vino está dada por $g(x) = 30 - x$. Encontremos:

a) La función de utilidad total del pan.
b) La función de utilidad total del vino.
c) Si el consumidor desea adquirir tres paquetes de pan y tres de vino, cuál de los artículos le producirá mayor utilidad (satisfacción).

Solución: para encontrar la función de utilidad de ambos bienes es necesario integrar las funciones $f(x)$ y $g(x)$, por lo que empleamos la fórmula $\int f(x)dx = F(x) + C$, donde C es la constante de integración.

a) La función de utilidad total para el pan se representa por:

$$U_1(x) = \int (40 - 5x)\, dx$$

Si empleamos las fórmulas descritas en la unidad anterior se tiene:

$$\int (40 - 5x)\, dx = 40\int dx - 5\int xdx$$

Con ello, la función de utilidad total del pan es:

$$U_1(x) = 40x - \frac{5}{2}x^2 + C$$

Donde hacemos $C = 0$, ya que si no se compra ningún artículo la utilidad será cero.

b) La función de utilidad del vino se define por:

$$U_2(x) = \int (30 - x)\, dx$$

Al emplear las fórmulas de integración tenemos:

$$\int (30 - x)dx = 30\int dx - \int xdx$$

Así, la función de utilidad total del vino es:

$$U_2(x) = 30x - \frac{1}{2}x^2 + C$$

Donde hacemos C = 0, ya que si no se compra ningún artículo la utilidad será cero.

c) La utilidad que le produce al consumidor adquirir tres paquetes de pan, considerando que $x = 3$ es:

$$U_1(3) = 40(3) - \frac{5}{2}(3)^2 = 97.5$$

Cuando el consumidor adquiere tres unidades de vino, su utilidad es:

$$U_2(3) = 30(3) - \frac{1}{2}(3)^2 = 85.5$$

Como puede observarse, el pan le produce una mayor utilidad a un individuo que el vino.

En este tipo de problemas, la función de utilidad de un consumidor es un tanto subjetiva, ya que no aporta gran información. El único objetivo es determinar qué artículo le da mayor utilidad a un individuo.

La función de utilidad de una empresa es más específica y más objetiva en el sentido de que permite conocer el monto monetario en el cual se encuentran sus ganancias dependiendo del nivel de producción que mantenga. Por ello, centraremos nuestra atención en este tipo de problemas.

Ejemplo 2

Un empresario sabe que sus funciones de ingreso marginal y costo marginal son $I'(x) = 8 - 6x + 2x^2$ y $C'(x) = 2 + 60x - x^2$. Con esta información, se desea conocer:

a) La función de ingreso total y el ingreso total si se producen 50 artículos y $C = 200$.
b) La función de costo total y el costo total si se producen 50 artículos y los gastos generales son de 800.
c) La utilidad total.

Solución: a) Sea la función diferenciable $I'(x) = 8 - 6x - 2x^2$, la función de ingreso total se define por:

$$I(x) = \int (8 - 6x + 2x^2)dx = 8\int dx - 6\int xdx + 2\int x^2 dx$$

Cuando empleamos las fórmulas de integración la función de ingreso total es:

$$I(x) = 8x - 3x^2 + \frac{2}{3}x^3 + C$$

Como queremos encontrar el ingreso total si $x = 50$ y $C = 200$:

$$I(50) = 8(50) - 3(50)^2 + \frac{2}{3}(50)^3 + 200$$

$$I(50) = 76\,433.33$$

b) Con la función $C'(x) = 2 + 60x - x^2$, el costo total es:

$$C(x) = \int (2 + 60x - x^2)dx = 2\int dx + 60\int x\,dx - \int x^2 dx$$

Al aplicar las reglas de integración, la función de costo total es:

$$C(x) = 2x + 30x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$$

Dado que $x = 50$ y los gastos generales $C = 800$, tenemos:

$$C(50) = 2(50) + 30(50)^2 - \frac{1}{3}(50)^3 + 800$$

$$C(50) = 34\,233.33$$

c) Sabemos que el ingreso total es de 76 433.33 y el costo total es de 34 233.33. Recordemos que la utilidad se obtiene restando al ingreso total el costo total. De esta manera, la utilidad total es:

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

$$U(50) = 76\,433.33 - 34\,233.33 = 42\,200$$

Con lo anterior podemos concluir que cuando la empresa produce y vende 50 artículos, la utilidad total es de $42 200.

Ejemplo 3

Si las funciones de ingreso marginal y costo marginal de una empresa son $I'(x) = 2\,500 - 50x - 2x^2$ y $C'(x) = 1\,500 - 20x - x^2$, respectivamente, y si la empresa conoce que la cantidad que maximiza la utilidad es $x = 20$, determinemos la utilidad máxima.

Solución: como podemos observar, se nos proporciona la cantidad que maximiza la ganancia, por lo que es de suponerse que una cantidad superior a

20 hará que la ganancia disminuya. Por ello, la integral debe resolverse como una integral definida con límites (0,20), ya que cualquier cantidad de producción entre 0 y 20 arrojará como resultado una ganancia mayor.

La fórmula que empleamos en la integral definida es:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Como la utilidad es la diferencia entre el ingreso y el costo, si sustituimos las ecuaciones de ingreso y costo marginal, la integral queda definida por:

$$U(x) = \int_a^b \left[I'(x) \; - \; C'(x) \right] dx$$

$$U(x) = \int_0^{20} \left[(2\,500 - 50x - 2x^2) - (1\,500 - 20x - x^2) \right] dx$$

$$= \int_0^{20} (1\,000 - 30x - x^2) dx$$

$$= 1\,000 \int_0^{20} dx - 30 \int_0^{20} x\,dx - \int_0^{20} x^2 dx = 1\,000x \Big|_0^{20} + 15x^2 \Big|_0^{20} - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{20}$$

$$= \left[1\,000(20) - 1\,000(0) \right] - \left[15(20)^2 - 15(0)^2 \right] - \left[\frac{1}{3}(20)^3 - \frac{1}{3}(0)^3 \right]$$

$$= 20\,000 - 6\,000 - 2\,666.67$$

$$U(x) = 11\,333.33$$

La utilidad total cuando se producen 20 artículos es de $11 333.33.

Ejemplo 4

Una empresa dedicada a la fabricación de artículos de limpieza determinó que si se producen $x = 100$ artículos por semana, entonces el costo marginal está determinado por $C'(x) = \ln x$ y el ingreso marginal está dado por $I'(x) = x \ln x$, donde el costo y el ingreso se calculan en miles de pesos. Con estos datos determinemos:

a) El ingreso total si $C = 50$.
b) El costo total si los costos fijos son $C = 80$.
c) La utilidad total.

Solución: como podemos apreciar, las funciones que se nos proporcionan son logarítmicas, por lo cual la forma adecuada de resolver este problema es mediante la utilización del método de integración por partes. La fórmula empleada en la integración por partes es:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

a) La función de ingreso total se define por:

$$I(x) = \int x(\ln x) dx$$

Elijamos: $u = \ln x$, por lo que $du = \frac{dx}{x}$, $dv = x\, dx$, con lo cual $v = \frac{x^2}{2}$.

Con ello:

$$I(x) = \int x(\ln x) dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

Sabemos que $x = 100$ y $C = 50$, por lo que al sustituir:

$$I(x) = \frac{(100)^2 \ln(100)}{2} - \frac{(100)^2}{4} + 50$$

Así, el ingreso total es:

$$I(x) = 20\,575.85$$

b) La función de costo total es:

$$C(x) = \int (\ln x) dx$$

Escojamos: $u = \ln x$, por lo que $du = \frac{dx}{x}$, $dv = dx$, con lo cual $v = x$.

Con ello:

$$C(x) = \int (\ln x) dx = x(\ln x) - \int dx = x(\ln x) - x + C$$

Sustituimos $x = 100$ y $C = 80$.

$$C(100) = 100 \ln(100) - 100 + 80$$

Con ello, el costo total es:

$$C(x) = 440.52$$

c) Con los datos obtenidos, la utilidad total es:

$$U(100) = 20\,575.85 - 440.52 = 20\,135.33$$

Ejemplo 5

Una agencia de publicidad realizó un estudio para conocer la utilidad que tuvo el mes pasado y determinó las siguientes funciones de ingreso marginal y costo marginal: $I'(x) = \dfrac{15x^4}{x^5 + 7}$ y $C'(x) = 2x(x^2 + 5)^{-1}$. El costo y el ingreso (en miles de pesos) están en función del número de servicios que prestó la agencia. Determinemos:

a) La función de ingreso total y el ingreso total al prestar 35 servicios si $C = 20$.
b) La función de costo total y el costo total cuando se dan 35 servicios y se tienen gastos generales de $C = 15$.
c) La utilidad total cuando se dan 35 servicios.

Solución: la información presentada nos conduce a trabajar empleando el método de integración por sustitución.

a) La función de ingreso total se obtiene al hacer uso de la técnica de sustitución.

$$I(x) = \int \frac{15x^4}{x^5 + 7}\,dx$$

Elegimos $u = (x^5 + 7)$ y diferenciamos:

$$du = 5x^4\,dx$$

$$3\,du = 15x^4\,dx$$

Con ello:

$$I(x) = \int 15x^4(x^5+7)^{-1}dx = 3\int u^{-1}du$$

$$= 3\ln|u| + C$$

La función del ingreso total es:

$$I(x) = 3\ln|x^5 + 7| + C$$

Con $x = 35$ y C = 20, el ingreso total será:

$$I(35) = 3\ln|(35)^5 + 7| + 20$$

$$I(35) = 73.33$$

El ingreso total al prestar 35 servicios es de 73 330.

b) Empleando los pasos de la integración por sustitución, la función de costo total se define:

$$C(x) = \int 2x(x^2+5)^{-1}dx$$

Escogemos $u = (x^2 + 5)$ y diferenciamos:

$$du = 2x\,dx$$

Así:

$$C(x) = \int 2x(x^2+5)^{-1}dx = \int u^{-1}du$$

$$= \ln|u| + C$$

La función del costo total queda:

$$C(x) = \ln|x^2 + 5| + C$$

Como $x = 35$ y $C = 15$, el costo total es:

$$C(35) = \ln|(35)^2 + 5| + 15$$

$$C(35) = 22.114$$

El costo total al prestar 35 servicios es de 22 114 pesos.

c) La utilidad total es:

$$U(35) = 73\,330 - 22\,114 = 51\,216$$

De esta manera, la utilidad de la agencia al prestar 35 servicios es de 51 216 pesos.

Ejercicio 1

1. Las funciones de ingreso y costo marginal de una empresa que se dedica a la venta de seguros son $I'(x) = 4 + 80x - x^2$ y $C'(x) = 12 - 4x + x^2$ respectivamente, y si la empresa conoce que para el ingreso $C = 80$ y para los costos $C = 100$, determina la utilidad total al vender $x = 20$ unidades.

2. Las funciones de ingreso marginal y costo marginal (en miles de pesos) de una agencia de autos usados son $I'(x) = 25 - 3x$ y $C'(x) = 25 - 7x + x^2$. Si el número de ventas que maximiza la ganancia es de 4 por día, calcula la utilidad total.

3. Si la utilidad marginal de una tienda que vende aparatos electrodomésticos es $U'(x) = x^3 \ln x$, determina la utilidad total si $x = 20$ y $C = 300$.

4. Una agencia de viajes determina que su función de utilidad marginal se define por $U'(x) = (x^2 + 1)\, x\, dx$. Si la agencia tuvo $x = 10$ ventas y si $C = 100$, determina la utilidad total.

5. Una compañía lleva a cabo una campaña promocional de sus productos, los gastos que genera serán a razón de \$ 8 000.00 por día. Los especialistas en mercadotecnia estiman que los ingresos están dados a razón de $I' = -40x^2 + 24\,000$ y que disminuyen con la duración de la campaña. Determina:

¿A cuánto ascienden las utilidades totales durante este periodo?

10.2. Agotamiento de recursos

Al hacer referencia al agotamiento de recursos en las empresas, primero debemos entender qué son y cuál es su función.

> Un **recurso** es aquel elemento de carácter material, tecnológico o humano que sirve para llevar a cabo alguna tarea específica donde se persigue un fin.

• El **recurso humano** entra en el apartado de agotamiento de recursos, cuando el personal que tiene una compañía ya no es suficiente para cumplir con los requerimientos de la empresa, considerando que existe un tope de personal que se puede contratar, ya que si se contrata más personal del necesario se producirán mayores costos a la compañía. Es decir, la producción aumentará por tener mayor personal, sin embargo, este aumento en la producción será cada vez menor como resultado, por ejemplo, de no existir más maquinaria para ocupar este personal o de que entre ellos mismos entorpezcan sus labores por cuestión de espacio.

• El **recurso tecnológico** es importante en cuanto permite realizar una actividad de manera más eficiente. De igual manera, si se incrementa el recurso tecnológico la producción total aumentará, pero aumentará cada vez en menor proporción, esto debido a que si hay más máquinas puede no haber personal que las opere o que la producción mayor generada en una estación de trabajo genere inventario porque la siguiente estación no tiene capacidad suficiente para procesar el incremento que se da por tener un mejor equipo y esto provoque un desbalance de la línea. Es importante destacar que el recurso tecnológico no sólo se refiere a la maquinaria, sino también se consideran todos aquellos elementos que permiten efectuar una actividad de manera más eficiente. Por ejemplo, una computadora permite agilizar trabajos de oficina con la posibilidad de realizar correcciones posteriores.

• El **recurso monetario** cobra importancia ya que permite destinar cantidades de dinero para realizar diversas actividades, como el pago de salarios y compra de materia prima, entre otras. Un aspecto relevante del recurso monetario es que de no existir utilidades para una empresa es posible que los costos se igualen a los ingresos, o peor aún, que los costos superen a los ingresos, en cuyo caso la empresa tendrá pérdidas y no podrá hacer frente a sus necesidades.

Por lo expuesto, es importante revisar el agotamiento de recursos, como un elemento clave para las empresas.

Ejemplo 6

Una tienda de ropa para dama realiza su gran venta anual donde toda su mercancía tiene precios rebajados, las rebajas se dan por departamentos, es decir, la primer semana serán en el departamento de damas, la siguiente en el de caballeros y así sucesivamente; se ha calculado que durante este periodo los ingresos se generan a razón de $I'(x) = 5\,000x - 20x^2$ pesos por día y los costos se dan a razón de $C'(x) = 2\,000x + 10x^2$ por día; si x representa el número de días, determina:

a) ¿Cuántos días deberá durar la gran venta anual?
b) ¿Cuál es la utilidad total obtenida como resultado de dicho evento?
c) Indica la utilidad que se genera gráficamente.

Solución:

a) Esta promoción en la tienda durará hasta que la utilidad sea máxima, es decir, hasta que $I'(x) = C'(x)$:

$$5\,000x - 20x^2 = 2\,000x + 10x^2$$
$$-20x^2 - 10x^2 = 2\,000x - 5\,000x$$
$$-30x^2 = -3\,000x$$
$$-30x^2 + 3\,000x = 0$$
$$-30x(x - 100) = 0$$
$$-30x = 0$$
$$x = 0$$
$$x - 100 = 0$$
$$x = 100$$

No consideramos el valor de 0, puesto que no tiene sentido. Por lo que la gran venta anual de esta tienda debe durar 100 días.

b) La utilidad total en ese periodo está dada por la integral definida

$$\int_0^{100} (5\,000x - 20x^2 - (2\,000x + 10x^2))dx$$

$$\int_0^{100} (-30x^2 + 3\,000x)dx$$

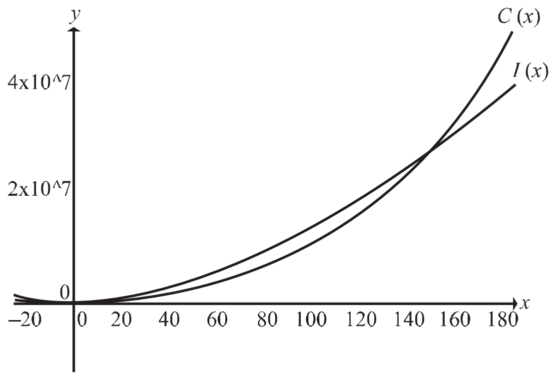
$$= \frac{-30x^3}{3} + \frac{3\,000x^2}{2}\Bigg|_0^{100}$$

$$= -10x^3 + 1500x^2\Bigg|_0^{100} = \left[-10(100)^3 + 1\,500(100)^2\right] - \left[-10(0)^3 + 1\,500(0)^2\right]$$

$$= -10\,000\,000 + 15\,000\,000 = \$5\,000\,000.00$$

La utilidad total es de \$ 5 000 000.00

c) Gráficamente la utilidad es el área entre el ingreso y el costo.



Ejemplo 7

Una empresa está considerando incrementar su personal de publicidad. El costo marginal de la adición de este personal está dado por $C'(x) = \frac{1}{2}\ln x$, en donde $C(x)$ está en unidades que representan 5 000 unidades monetarias y x es el número de personas agregadas. Si se agregan cinco personas, ¿cuál es costo total si el costo fijo es cero ($C = 0$)?

Solución: integremos $C'(x) = \frac{1}{2}\ln x$, es decir, $\int \frac{1}{2}\ln dx$

Empleando la integración por partes, elegimos:

$u = \ln x$, por lo que $du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx$, con lo cual $v = \frac{1}{2}x$

Se tiene que el costo adicional es:

$$C(x) = \int \ln dx = \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x\ln x - \frac{x}{2} + C$$

De esta manera, sabiendo que se agregan cinco personas y que $C = 0$

$$C(5) = \frac{5\ln 5}{2} - \frac{5}{2} = 1.52$$

Cuando se agregan cinco personas, el costo adicional es de 1.52 unidades o (1.52)(5 000) = 7 600 unidades monetarias.

Una decisión a la que se enfrentan muchas organizaciones es la de determinar el punto óptimo en el tiempo en que deben sustituir una pieza importante de equipo. Dicho equipo se caracteriza con frecuencia por dos componentes de costo: el costo capital y el costo de operación. El **costo capital** es el costo de compra menos el valor de recuperación. Por ejemplo, si una máquina cuesta $100 000 y posteriormente se vende en $20 000, el costo capital es de $80 000. El **costo de operación** incluye los costos de propiedad y mantenimiento de una pieza de equipo. La gasolina, el aceite, el seguro y los costos de reparación asociados con tener y operar un vehículo pueden considerarse costos de operación.

El costo de capital es útil para determinar el momento en el cual se debe reemplazar algún equipo, además de establecer el monto en el que habrá de incrementar o disminuir la ganancia de una empresa.

Es en este sentido en el que se considera este rubro como un agotamiento de recurso, ya que la tecnología es un recurso indispensable en la mayoría de las actividades que desarrollan individuos o empresas, y si el equipo ya cumplió su vida útil es de esperarse que se reduzca su rendimiento, lo cual provoca que se incrementen los costos.

Definimos como **formación de capital** a un proceso que se da a través del tiempo de manera continua, donde se incrementa la cantidad acumulada de los bienes de capital. La acumulación de bienes de capital puede expresarse en función del tiempo, $K(t)$.

La tasa de formación de capital $\frac{dK(t)}{dt} = K'(t)$ es igual al flujo de inversión neta, representada por $i(t)$. Por lo tanto, la acumulación de bienes de capital es la integral con respecto al tiempo de flujo de la inversión neta:

$$K(t) = \int K'(t) = \int \iota(t)dt$$

de donde

$$\iota(t)dt = K(t) + C$$

Debemos poner atención a la formación de capital en el sentido de que al acabarse la vida útil de algún equipo es necesario reponerlo y, además, en ocasiones resulta necesario adquirir mayores recursos tecnológicos para poder incrementar el nivel de producción.

Ejemplo 8

Si el flujo de inversión en una empresa está dado por $i(t)=6t^{\frac{2}{5}}$ y la acumulación inicial de bienes de capital en t = 0 es K(0), determina:

a) La función que representa el capital K.
b) El capital en el periodo t = 3, con C = 100

Solución:

a) La función que representa el capital es:

$$K=6\int t^{\frac{2}{5}}dt=\frac{42t^{\frac{7}{5}}}{5}+C$$

b) Dado que t = 3 y C = 100, tenemos:

$$K=\frac{42(3)^{\frac{7}{5}}}{5}+100$$
$$K=139.11$$

El capital para el periodo t = 3 es de $ 139.11

Ejemplo 9

Una empresa que se dedica a la fabricación de muebles conoce que su flujo de inversión tiene la función $i(t)=4t^{\frac{1}{3}}$, donde el flujo de capital está dado en unidades que representan 100 000 unidades monetarias. Con ello, determinemos:

a) La acumulación de capital durante el primer año.
b) La acumulación de capital durante los primeros seis años.

Solución: ya que se nos proporciona la información sobre el periodo en el que se desea conocer el flujo, es decir, la cantidad de capital durante el primer año, esto nos muestra el intervalo que va de cero a uno, por lo cual este problema se resuelve empleando la noción de la integral definida, con lo cual tenemos:

$$K(t)=\int_0^t 4t^{\frac{1}{3}}dt$$

a) Como se quiere conocer el flujo al primer año, tenemos:

$$K(1) = 4\int_0^1 t^{\frac{1}{3}} dt = 3(t)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 = \left[3(1)^{\frac{4}{3}} - 3(0)^{\frac{4}{3}}\right] = [3(1) - 3(0)] = 3$$

El flujo de capital durante el primer periodo es de 300 000 ((3)(100 000)) unidades monetarias.

b) Si $t = 6$, la función nos queda como:

$$K(6) = 4\int_0^6 t^{\frac{1}{3}} dt = 3(t)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^6 = \left[3(6)^{\frac{4}{3}} - 3(0)^{\frac{4}{3}}\right] = \left[3(10.90) \; - \; 3(0)\right] = 32.71$$

Durante los primeros seis años, el flujo de capital será de 32.71 unidades o 3 271 000 unidades monetarias.

Ejemplo 10

El departamento de planeación de una empresa que fabrica calzado considera realizar una inversión a fin de actualizar sus procesos productivos. Al hacer un estudio, encontró que su flujo de inversión está dado por $i(t) = \ln t$. Determinemos el desembolso que debe realizar en el cuarto año, si el flujo está en unidades que representan 20 000 unidades monetarias.

Solución: con los datos proporcionados se aprecia que la solución puede encontrarse al emplear el método de integración por partes debido a la existencia de la función logarítmica. De esta manera, la función es:

$$K(t) = \int \ln t \, dt$$

Si elegimos:

$u = \ln t$, entonces $du = \dfrac{dt}{t}$ y, por lo tanto $dv = dt$, con lo cual $v = t$. Así:

$$K(t) = \int \ln t \, dt = t \ln t - \int dt = t \ln t - t$$

Ya que se desea conocer el flujo en el cuarto periodo, nos queda:

$$K(4) = (4)\ln(4) - 4 = 5.55 - 4 = 1.55$$

En el cuarto año hay que hacer un desembolso de 1.55 unidades, es decir, 20 000 × 1.55 = 31 000 unidades monetarias.

Ejercicio 2

1. Una compañía industrial compró una máquina cuya producción rinde un ingreso adicional I' en un tiempo t de:

$$I'(t) = 225 - \frac{1}{4}t^2$$

Donde $I'(t)$ está dada en unidades que representan 10 000 unidades monetarias y t está expresado en años. El costo adicional $C'(t)$ por reparaciones y mantenimiento al tiempo t es:

$$C'(t) = 2t^2$$

En donde C' está en unidades que representan 10 000 unidades monetarias y t está en años. Si la empresa determinó que la máquina debe desecharse a los 10 años de uso, determina:

a) La ganancia neta total a los 10 años.
b) La ganancia neta total si la máquina debe desecharse a los cuatro años.

2. Una empresa determina que su flujo de inversión es $i(t) = 15t^{\frac{1}{4}}$, la acumulación del capital a t = 0 es 30; encontrar la función que representa el capital, K.

3. Si el flujo de inversión neta es $i(t) = 6t^{\frac{1}{2}}$, determina:

a) La acumulación de capital durante el primer año.
b) La acumulación de capital durante los primeros nueve años.

4. El flujo de inversión de una compañía de consultoría en asuntos mercadológicos es $i(t) = t \ln t$. La compañía desea conocer la inversión que debe realizar en el cuarto año después de haber iniciado operaciones si C = 800.

10.3. Inventarios

Un problema común en las organizaciones es determinar cuánto se debe tener en existencia de un cierto artículo. Para el vendedor a menudeo, el problema puede referirse a cuántas unidades de cada producto debe tener en existencia, ya que no vende grandes cantidades.

Para los productores, el problema puede implicar qué cantidad de cada materia prima debe tener en existencia a fin de que si de pronto se incrementa la demanda de sus productos, éste sea capaz de cubrir las necesidades de los consumidores sin tener problemas de abastecimiento.

Un **inventario** comprende las existencias de cualquier artículo, material o recurso utilizado en una organización en los procesos de fabricación y/o distribución. Las materias primas, las partes componentes, los subensambles y los productos terminados son parte del inventario, así como los diversos abastecimientos requeridos en el proceso de producción y distribución.

Este problema se identifica con un área llamada *control de inventario* o *administración de inventarios*. Respecto a la pregunta de qué *cantidad de inventario* se debe tener a mano, puede haber costos asociados con el hecho de tener muy poco o demasiado inventario.

La necesidad de los inventarios surge de las diferencias entre el tiempo y la localización de la demanda y el abastecimiento, por lo que se usan como amortiguador entre la oferta y la demanda.

Las políticas de inventarios de materias primas, productos en proceso o artículos terminados, deben tender a lograr un flujo continuo entre funciones de producción y distribución.

En general, los problemas de inventario se relacionan con la respuesta de cuánto se debe ordenar (o producir) y con qué frecuencia se debe reordenar (o producir), a fin de minimizar los costos de llevar el inventario, de producir u ordenar, de escasez o de faltante.

Cuando se habla de inventarios es necesario describir tres tipos de costos:

1. Costos de comprar. Se refieren al costo que involucra comprar artículos o materia prima para adquirir mercancía que habrá de utilizarse como protección ante una posible escasez o desabasto en el mercado.

2. Costos de tener. Este tipo de costo es aquel que se tiene cuando es necesario mantener un nivel satisfactorio de materia prima o producto terminado, incluye los costos de manejo, daños y pérdidas provocados por el manejo de los artículos, fletes, papelería y todos los requerimientos de registro del almacén, además de tener que reponer mercancía que haya sido empleada.

3. Costo de mantener. Costos que se generan por el hecho de tener un artículo en inventario, incluyen costos de capital invertido, costos de deterioro, obsolescencia, robos, seguros e impuestos y los costos de espacio, gastos de instalación, depreciación del edificio y equipo de almacén, renta de la superficie ocupada (aun cuando el edificio fuera propio) y seguridad.

El costo de comprar se caracteriza por ser una especie de costo promedio de la forma:

$$\text{Costo de comprar} = \frac{k}{x}$$

Donde k es el costo de la mercancía que habrá de almacenarse y x es el número de artículos o de materia prima que se almacena.

El costo de tener es de la forma:

$$k(x)$$

Esto indica que tener en inventario tiene un costo para cada unidad.

Por último, el costo de mantener es un costo fijo para todo el lote que esté en inventario.

Ejemplo 11

Un vendedor de bicicletas examinó los datos acerca de los costos y determinó una función que expresa cambio en el costo anual de comprar y tener el inventario como función del tamaño (número de unidades) de cada orden que vende de bicicletas. La función de cambio en el costo es: $C'(x) = 4\,860(x)^{-2} + 15$

En donde $C'(x)$ es el cambio en el costo anual del inventario y x es el número de bicicletas ordenadas cada vez que el vendedor se reabastece. Si el costo de mantener el inventario es $C = 750\,000$, determinemos a cuánto se espera que ascienda el costo anual del inventario si se ordenan $x = 18$ bicicletas cada vez que el vendedor se reabastece.

Solución: en primer lugar obtengamos el costo anual del inventario, para ello integremos la función de cambio:

$$C(x) = \int (-4\ 860x^{-2} + 15)dx = -4\ 860\int x^{-2}dx + 15\int dx$$

$$C(x) = \frac{4\ 860}{x} + 15x + C$$

Como el costo de mantener el inventario es C = 750 000, el costo anual del inventario se representa por:

$$C(x) = \frac{4\ 860}{x} + 15x + 750\ 000$$

Dado que se quiere conocer el costo cuando se ordenan 18 bicicletas, tenemos:

$$C(18) = \frac{4\ 860}{18} + 15(18) + 750\ 000 = 270 + 270 + 750\ 000 = 750\ 540$$

El costo anual del inventario cuando se ordenan 18 bicicletas es de $750 540.00

Ejemplo 12

Un distribuidor de pelotas de tenis se siente satisfecho porque este deporte se convirtió en uno de los más populares del país. Uno de los principales problemas del distribuidor es abastecer la demanda de pelotas de tenis, las cuales compra periódicamente a un fabricante de artículos deportivos. El cambio en el costo de comprar y tener el inventario de pelotas está definido por la función:

$$C'(x) = -120\ 000x^{-2} + 0.12$$

En donde x es el tamaño de cada orden (en docenas de pelotas de tenis) y $C'(x)$ es el cambio en el costo anual del inventario. Si la empresa determina que el costo de mantener el inventario es C = 2 000 000, determinemos el monto al cual ascienden los costos de inventario si se ordenan 1 000 docenas de pelotas.

Solución: obtengamos el costo del inventario empleando las reglas de integración:

$$C(x)=\int(-120\,000x^{-2}+0.12)dx=-120\,000\int x^{-2}dx+0.12\int dx$$

$$C(x)=\frac{120\,000}{x}+0.12x+C$$

El costo de mantener el inventario es C = 2 000 000, por lo que el costo del inventario es:

$$C(x)=\frac{120\,000}{x}+0.12x+2\,000\,000$$

El costo cuando se ordenan 1 000 docenas de pelotas es:

$$C(1\,000)=\frac{120\,000}{1\,000}+0.12(1\,000)+2\,000\,000$$
$$=120+120+2\,000\,000=2\,000\,240$$

El costo del inventario al ordenar 1 000 docenas de pelotas es de $2 000 240.00

Ejemplo 13

Un distribuidor de refacciones para automóvil tiene una alta demanda de esos productos, por lo cual decide establecer una política de inventarios a fin de no quedarse sin artículos. Al efectuar un estudio encontró que el cambio que tiene el costo de tener un inventario es $C'(x)$ = 3 ln x, y el costo de mantener el inventario es de 15 000; determinemos el costo por tener y mantener en inventario 50 artículos.

Solución: sea:

$$C(x)=\int 3\ln x\,dx$$

Si elegimos: u = ln x, entonces $du=\frac{dx}{x}$ y, por lo tanto dv = 3 dx, con lo cual v = 3x.

Así:

$$C(x)=\int 3\ln x\,dx=3x\ln x-3\int dx=3x\ln x-3x+C$$

El costo por tener y mantener 50 artículos en inventario, cuando el costo de mantener es $C = 15\ 000$, es:

$C(50) = 3(50)\ln(50) - (3)(50) + 15\ 000 = 586.80 - 150 + 15\ 000 = 15\ 436.80$

Cuando se tienen y mantienen en inventario 50 artículos, el costo es de \$15 436.80.

Ejercicio 3

1. Un fabricante determinó una función de costos que expresa el cambio en el costo anual de comprar y tener su inventario de materias primas como función del tamaño de cada orden. La función de cambio en el costo es $C'(x) = -9\ 000x^{-2} + 10$

En donde x es el tamaño de cada orden (en toneladas) y $C'(x)$ es el cambio en el costo anual del inventario. Si la empresa determina que el costo de mantener el inventario es $C = 900\ 000$, determina el monto al cual ascienden los costos de inventario si se ordenan 30 toneladas.

2. El cambio en el costo por tener un inventario en un almacén es $C'(x) = 18 \ln x$. Si el costo de mantener el inventario es $C = 85\ 000$, determina el costo de tener y mantener en inventario 100 artículos.

3. La función del cambio en el costo de comprar para un inventario es $C'(x) = -36\ 000x^{-2}$, si el costo de mantener el inventario es de $C = 700$, calcula el costo de comprar y de mantener el inventario con $x = 60$.

Ejercicios resueltos

1. Una consultora determina que su función de utilidad marginal se define por $U'(x) = (x^3 + 1)\ 9x^2$. Si la agencia vendió $x = 35$ servicios y si $C = 250$, determinemos la utilidad total.

Solución: dada la información, se emplea el método de integración por sustitución.

La función de utilidad total es:

$$U(x) = \int 9(x^3+1)x^2\ dx$$

Elegimos $u = (x^3 + 1)$ y diferenciamos:

$$du = 3x^2\ dx$$

$$3du = 9x^2\ dx$$

con ello:

$$U(x) = \int (x^3+1)\ 9x^2 dx = 3\int u\ du$$

Con esto, la función de la utilidad total es:

$$U(x) = \frac{3}{2}u^2 + C = \frac{3}{2}(x^3+1)^2 + C$$

Con $x = 35$ y $C = 250$, la utilidad total será:

$$U(35) = \frac{3}{2}\left[(35)^3+1\right]^2 + 250 = 2\ 757\ 527\ 314$$

La utilidad al producir y vender 35 servicios es de $2 757 527 314.

2. Una empresa que se dedica a la fabricación de papel conoce que su flujo de inversión está dado por la función $i(t) = 6t^{\frac{1}{5}}$, donde el flujo de capital está dado en miles de unidades monetarias. Con ello, determinemos:

a) La acumulación de capital durante los dos primeros años.
b) La acumulación de capital durante los primeros cuatro años.

Solución: resolviendo como una integral definida, tenemos:

$$K(t) = \int_0^t 6t^{\frac{1}{5}} dt$$

a) Como se quiere conocer el flujo al segundo año, tenemos:

$$K(2) = 6\int_0^2 t^{\frac{1}{5}} dt = 5t^{\frac{6}{5}}\Big|_0^2$$

$$= \left[5(2)^{\frac{6}{5}} - 5(0)^{\frac{6}{5}} \right]$$

$$= 5(2.3) - 5(0) = 11.5$$

El flujo de capital durante el primer periodo es de 11 500 unidades monetarias.

b) Si $t = 4$, la función nos queda como:

$$K(4) = 6\int_0^4 t^{\frac{1}{5}} dt = 5t^{\frac{6}{5}} \Big|_0^4$$

$$= \left[5(4)^{\frac{6}{5}} - 5(0)^{\frac{6}{5}} \right]$$

$$= 5(5.28) - 5(0) = 26.4$$

Durante los primeros cuatro años, el flujo de capital será de 26 400 unidades monetarias.

3. Un distribuidor de computadoras está satisfecho porque sus productos tienen cada vez mayor penetración en el mercado. Uno de los principales problemas del distribuidor es satisfacer la demanda de computadoras, las cuales adquiere de manera periódica a un fabricante, por lo que requiere tener esos artículos en inventario. El cambio en el costo de comprar, tener y mantener el inventario está definido por la función: $C'(x) = -10\,000x^{-2} + 15$

Si el distribuidor determina que el costo de mantener el inventario es $C = 20\,000$, determinemos el monto al cual ascienden los costos de inventario si se ordenan 200 computadoras.

Solución: obtengamos el costo del inventario empleando las reglas de integración:

$$C(x) = \int (-10\,000x^{-2} + 15)dx = -10\,000\int x^{-2}dx + 15\int dx$$

$$C(x) = \frac{10\,000}{x} + 15x + C$$

El costo de mantener el inventario es C = 20 000, por lo que el costo del inventario es $C(x)=\frac{10\ 000}{x}+15x+20\ 000$

El costo cuando se ordenan 200 computadoras es:

$$C(200)=\frac{10\ 000}{200}+15(200)+20\ 000=50+3\ 000+20\ 000=23\ 050$$

El costo del inventario al ordenar 200 computadoras es de \$23 050.00

4. Si el flujo de inversión neta es $i(t)=10t^{\frac{2}{3}}$, determinemos:

a) La acumulación de capital en el primer año con C = 20.
b) La acumulación de capital durante el séptimo año, con C = 50.

Solucion: a) La función que representa al capital es:

$$K=10\int t^{\frac{2}{3}}\,dt=6t^{\frac{5}{3}}+C$$

Como t = 1, K = 20, y por lo tanto, C = 20, tenemos:

$$K=6(1)^{\frac{5}{3}}+20=26$$

El flujo de inversión para el primer periodo es de 26.

b) Dado que t = 7, K = C, y por lo tanto, C = 50, tenemos:

$$K=6(7)^{\frac{5}{3}}+50=153.69+50=203.69$$

El flujo de inversión en el séptimo año es de \$203.69.

Ejercicios propuestos

1. Una tienda de autoservicio determina que su función de utilidad marginal se define por $U'(x)$ = $(3x^2 + 21)\ 6x$. Si la tienda tuvo x = 100 ventas y si C = 500, determina la utilidad total.

2. Si el flujo de inversión neta para una empresa cualquiera es $i(t)=3t^{\frac{3}{2}}$ determina:

a) La acumulación de capital durante los tres primeros años (en miles de unidades monetarias).
b) La acumulación de capital durante los primeros cinco años.

3. Un almacén que vende artículos importados de lujo tiene una alta demanda, por lo cual decide establecer una política de inventarios a fin de no quedarse sin artículos. Al efectuar un estudio encontró que el cambio que tiene el costo de tener un inventario es $C'(x) = 3x^2 \ln x$, y el costo de mantener el inventario es de 10 000, determina el costo por tener y mantener en inventario 100 artículos.

4. Una dependencia de gobierno realizó un estudio y observó que requiere contratar a 27 personas para cumplir con todas las tareas que se han atrasado. Al terminar el estudio se determinó que la función del cambio en el costo al contratar personal es $C'(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$. Calcula el costo adicional que tendrá la dependencia al emplear a las personas requeridas si $C = 30$ (en miles de pesos).

5. Se sabe que el cambio en el costo de tener inventario en una tienda de regalos es $C'(x) = \dfrac{3x^2}{x^3 - 3}$. Si el costo de mantener el inventario es $C = 10$ (en miles de pesos), calcula el costo por tener y mantener $x = 28$ artículos.

Autoevaluación

1. Si la utilidad marginal de una tienda que vende aparatos de ejercitación es $U'(x) = 3x^2 \ln x$, la utilidad total si $x = 15$ y $C = 230$ es:

a) 8 256.36
b) 8 244.67
c) 8 243.55
d) 8 231.44

2. Una empresa determina que su función de utilidad marginal se define por $U'(x) = (x + 7)$. Si la agencia tuvo $x = 45$ ventas y si $C = 320$, la utilidad total es:

a) 1 650.5
b) 1 633.5
c) 1 670.5
d) 1 647.5

3. Si el flujo de inversión neta se define por $i(t) = t^3$, la acumulación de capital durante el tercer año es:

a) 21.33
b) 20.84
c) 20.25
d) 21.05

4. Una distribuidora de automóviles de lujo decide establecer una política de inventarios a fin de no quedarse sin automóviles. Al efectuar un estudio encontró que el cambio que tiene el costo de tener un inventario es $C'(x) = 4x^3 \ln x$, y el costo de mantener el inventario es de 15 000, por lo tanto el costo por tener y mantener en inventario 25 artículos es:

a) 1 174 717.12
b) 1 175 166.33
c) 1 174 155.44
d) 1 715 156.25

5. Una fábrica de planchas decide efectuar una inversión para actualizar el equipo con el que cuenta. Si la inversión neta es $i(t) = \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}$, la acumulación del capital durante el segundo año (en miles de unidades monetarias) es:

a) 2.65
b) 2.86
c) 2.96
d) 2.37

6. Si el cambio en el costo de comprar (en miles de pesos) de una empresa es $C'(x) = (\ln x)^2$, y ordena $x = 20$ cajas de un artículo en particular, además de que el costo de mantener el inventario es $C = 100$, determina el costo de comprar y de mantener el inventario.

7. Una empresa quiere contratar a 10 trabajadores para incrementar su producción. La función de cambio en el costo al contratar personal es $C'(x) = \ln 5x$. Con $C = 250$, calcula el costo adicional.

8. Las funciones de ingreso y costo marginal de una tienda de venta de calzado son $I'(x) = 300 - 13x - 3x^2$ y $C'(x) = 100 - 90x + 4x^2$. Determina la utilidad total si se venden $x = 5$ pares de calzado y $C = 30$.

9. Una tienda de joyería determinó que sus funciones de ingreso y costo marginal están definidas por $I'(x) = 25\,000 - 500x - 20x^2$ y $C'(x) = 15\,000 + 200x + 10x^2$. Determina la utilidad total si se sabe que la cantidad de artículos que maximiza la ganancia es $x = 5$.

10. Una fábrica de hule espuma determinó que la función de cambio en el costo al contratar más personal es $C'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$. Calcula el costo (en miles de pesos) si se contrata a $x = 50$ trabajadores y $C = 15$.

11. La función de cambio en el costo de comprar y tener inventarios para una empresa es $C'(x) = -12\,500\,x^{-2} + 1.3$. Si el costo de mantener es $C = 40$, determina el costo al comprar, tener y mantener $x = 75$ artículos.

12. Un taller determinó que el cambio en el costo de comprar es $C'(x) = \dfrac{9x^2}{x^3+2}$, si el costo de mantener es $C = 12$, calcula el costo por comprar y mantener $x = 33$ artículos.

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

1. La utilidad de la compañía al vender 20 seguros es de $11 286.67

2. La agencia de automóviles usados tiene una utilidad de 10 670 pesos por día.

3. La utilidad total de la tienda es de $110 129.29

4. La utilidad de la agencia de viajes es de $2 650.25

5. La utilidad es de $ 21 333.33

Ejercicio 2

1. a) La ganancia a 10 años es de 1 500 unidades o 15 000 000 de unidades monetarias.

b) La ganancia a cuatro años si en este tiempo se desecha la máquina es 852 unidades o 8 520 000 unidades monetarias.

2. $K = 12t^{\frac{5}{4}} + 30$

3. a) La acumulación de capital durante el primer año es de 4 unidades monetarias.

b) La acumulación de capital durante los primeros nueve años es de 108 unidades monetarias.

4. El flujo de inversión al cuarto año es $807.09.

Ejercicio 3

1. El costo de comprar, tener y mantener en inventario 30 unidades es de $900 600.

2. El costo de tener y mantener en inventario 100 artículos es $91 489.31

3. El costo de comprar y mantener en inventario 60 artículos es $1 300.

Respuestas a los ejercicios propuestos

1. La utilidad de la tienda de autoservicio es 450 630 720.5

2. a) La acumulación de capital para los primeros 3 años es $18 706.15.
b) La acumulación de capital para los primeros cinco años es $67 082.04.

3. El costo de tener y mantener en inventario 100 artículos es $4 281 836.85.

4. El costo adicional al contratar a 27 trabajadores es de 41.93 miles de pesos.

5. El costo por tener y mantener en inventario 28 artículos es 19.99 miles de pesos.

Respuestas a la autoevaluación

1. b)

2. d)

3. c)

4. a)

5. b)

6. 199.66

7. 279.12

8. 1 700.83

9. 40 000.00

10. 22.83

11. 304.17

12. 43.46